Dozent: Dr. Martin Friesen

Tutor: Dennis Schroers

Finanzmathematik
Wintersemester 2018 / 2019

Weihnachtsblatt

- Abgabe bis **Donnerstag 10.01.2019 um 12:00.**
- Abgabe ins Postfach 89 auf Ebene D13.
- Die hier gesammelten Punkte werden als Bonuspunkte gewertet.

Aufgabe 1. (6 Punkte)
Betrachte ein EPM mit $d = 1$, $r = 0$, $\pi_0 = S_0 = 1$. Der Preis vom Asset sei $\pi_1 = 80$ und nach einer Periode

$$S_1(\omega) = \begin{cases} 120, & \omega = +1 \\ 60, & \omega = -1 \end{cases},$$

wo $\Omega = \{+1, -1\}$ und $p(+1) = p \in (0,1)$ sowie $p(-1) = 1 - p$.

(a) Bestimmen Sie alle risikoneutralen Maße.

(b) Ist das Model arbitragefrei? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Bestimmen Sie den arbitragefreien Preis für einen europäischen Call mit Basispreis $K = 90$ und Auszahlungsfunktion $C = (S_1 - K)_+$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Gegeben Sie ein EPM mit $d = 1$, $\pi_0 = 1$ und $S_0 = 1 + r$, wo $r > -1$. Das Asset habe den Anfangspreis $\pi_1 = 180$ und den Endpreis

$$S_1(+1) = 210, \quad S_1(-1) = 160,$$

wo $\Omega = \{+1, -1\}$ und $p(+1) = p \in (0,1)$ sowie $p(-1) = 1 - p$. Gegeben sei eine Option mit $C(+1) = 105$ und $C(-1) = 55$. Diese habe zu Beginn den arbitragefreien Preis $\pi(C) = 80$. Bestimmen Sie den Zinssatz r für den Bond sowie das eindeutige risikoneutrale Maß.

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Betrachte das EPM mit $r = 0$, $\pi_0 = \pi_1 = 1$ und $S_1(\omega) = \omega$ wo

$$\Omega = \{0, 1, \dots, n\}, \quad p(\omega) = \binom{n}{\omega} p^\omega (1-p)^{n-\omega}, \quad \omega \in \Omega,$$

(a) Überprüfen Sie ob dieser Markt arbitragefrei ist.

(b) Ist der Markt vollständig? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 4. (6 Punkte)
Betrachte das EPM mit endlichem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ wo $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ mit $|\Omega| = 3$. Es sei $d = 1$, $r = 0$, $\pi_0 = 1$, $\pi_1 = 10$ und die Endpreise vom Asset seien gegeben durch $S_1(\omega_1) = 15$, $S_1(\omega_2) = 12$, $S_1(\omega_3) = 8$.

(a) Geben Sie 2 verschiedene risikoneutrale Maße an.

(b) Welche Claims C lassen sich replizieren?

(c) Geben Sie ein Beispiel für ein Claim C an, welches nicht replizierbar ist.

Aufgabe 5. (10 Punkte)
Gegeben sei ein Finanzmarkt mit $T = 2$ Perioden und

$$\Omega = \{-1, +1\}^2 = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1, \omega_2 \in \{-1, +1\}\}.$$

Der Preisprozess für das Bond sei gegeben durch $S_0^0 = S_1^0 = S_2^0 = 1$. Wir betrachten einen Markt mit nur einem Asset beschrieben durch den Anfangspreis $S_0^1(\omega_1, \omega_2) = 4$ für alle $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$, sowie durch die Preise

$$S_1^1(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 7, & \omega_1 = +1 \\ 2, & \omega_1 = -1 \end{cases}, \quad S_2^1(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 8, & (\omega_1, \omega_2) = (+1, +1) \\ 5, & (\omega_1, \omega_2) = (+1, -1) \\ 3, & (\omega_1, \omega_2) = (-1, +1) \\ 1, & (\omega_1, \omega_2) = (-1, -1) \end{cases}.$$

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie

- $\sigma(S_0^1) = \{\emptyset, \Omega\}$,
- $\sigma(S_1^1) = \{\emptyset, \Omega, \{(+1, +1), (+1, -1)\}, \{(-1, +1), (-1, -1)\}\}$,
- $\sigma(S_2^1) = \mathcal{P}(\Omega)$.

(b) (3 Punkte) Sei $(\mathcal{F}_t)_{t \in \{0,1,2\}}$ die Filtration erzeugt durch die Preisprozesse, d.h. es gelte

- $\mathcal{F}_0 = \sigma(S_0^1)$,
- $\mathcal{F}_1 = \sigma\left(\{A \subset \Omega \mid A \in \sigma(S_0^1) \text{ oder } A \in \sigma(S_1^1)\}\right)$,
- $\mathcal{F}_2 = \sigma\left(\{A \subset \Omega \mid A \in \sigma(S_0^1) \text{ oder } A \in \sigma(S_2^1)\}\right)$.

Geben Sie alle Elemente von $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ explizit an.

(c) (2 Punkte) Wir betrachten das MPM mit der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,1,2\}}$ gegeben wie in (b). Geben Sie ein Beispiel für ein Portfolio $\xi = (\xi_t)_{t\in\{0,1,2\}}$. Geben Sie ein Beispiel für ein $\xi = (\xi_t)_{t\in\{0,1,2\}}$ welches kein Portfolio ist.

(d) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass dieses Model arbitragefrei ist.

Aufgabe 6. (3 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ gegeben. Beweisen Sie durch Induktion über n die Identität

$$x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} (\Delta x)_k,$$

wo $(\Delta x)_k = x_k - x_{k-1}$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$.